

静弾性問題の Green 関数

1 概要

この文章では静弾性問題の方程式の Green 関数を求める方法について記述する。なおここでは境界がない無限領域を考える。これは基本解または主要解 (fundamental solution) と呼ばれ、境界要素法 (境界積分法) などでも利用される。途中 Fourier 変換や、複素積分などを用いているがこれについては解説していない。また Green 関数の詳細についても触れていないので、これらについては各種参考書などを参照されたい。なおこの文章では指標表示と総和規約を用いている。

2 静弾性問題の基礎方程式

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\rho g_j \quad (1)$$

式 (1) は静弾性問題の基礎方程式である。ここで σ_{ij} は応力テンソル, x_i は位置ベクトル, ρ は密度, g_j 重力加速度ベクトルである。

応力-歪み関係から

$$D_{ijlm} \frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_i} = -\rho g_j \quad (2)$$

となる。ここで D_{ijlm} は弾性定数テンソル, ε_{lm} はひずみテンソルである。

続いてひずみ-変位関係から

$$D_{ijlm} \frac{1}{2} (\delta_{lp} \delta_{mq} + \delta_{lq} \delta_{mp}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_q} u_p = -\rho g_j \quad (3)$$

となる。ここで u_p は変位ベクトルである。

さらに弾性定数テンソルの対称性から

$$D_{ijlm} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} u_l = -\rho g_j \quad (4)$$

である。

ここで $D_{ijlm} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} = \mathcal{L}_{jl}$ とおく。

$$\mathcal{L}_{jl} u_l = -\rho g_j \quad (5)$$

3 Green 関数

ここではまず Poisson 方程式を例にとることにする。Poisson 方程式は下のように表される。

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\mathbf{x}) &= -f(\mathbf{x}) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m}\end{aligned}\tag{6}$$

Poisson 方程式の解を

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) + \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}')\tag{7}$$

と仮定する. ここで $\phi_0(\mathbf{x})$ は斉次解である. $\phi_0(\mathbf{x})$ は全領域中で $f(\mathbf{x}') = 0$ となる場合の解であり

$$\Delta\phi_0(\mathbf{x}) = 0\tag{8}$$

が成り立つ. 式 (8) の右辺第二項は全領域の $f(\mathbf{x}')$ が $\phi(\mathbf{x})$ に及ぼす影響を全て重ね合わせたものと考えられる.

式 (6) に式 (7) を代入すると, 式 (8) の関係から

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\tag{9}$$

である. この式を解くことで Green 関数が求まる. Green 関数を用いることで $f(\mathbf{x})$ が変化した場合にも, 再び微分方程式を解かずとも Poisson 方程式の解が求められる.

静弾性問題における Green 関数は下の式を解くことで求められる.

$$\mathcal{L}_{ji} G_{lp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta_{jp} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\tag{10}$$

4 境界要素法における Green 関数

ここでは Laplace 方程式を例にとることにする. Laplace 方程式は

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = 0\tag{11}$$

と表される. これは調和関数とも呼ばれる. これに任意の関数 ϕ^* を掛けて Ω 内で領域積分する.

$$\int_{\Omega} dV \phi^* \Delta\phi = 0\tag{12}$$

となる. ここで $\int_{\Omega} dV$ は Ω 内での領域積分を意味する. これを Gauss の発散定理を用いて部分積分する.

$$\int_{\Gamma} dS \phi^* \nabla\phi \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega} dV \nabla\phi^* \cdot \nabla\phi = 0\tag{13}$$

ここで Γ は Ω の境界, $\int_{\Gamma} dS$ は Γ 上での境界積分を意味する. 左辺第二項を Gauss の発散定理を用いて再び部分積分する.

$$\int_{\Gamma} dS \phi^* \nabla\phi \cdot \mathbf{n} - \int_{\Gamma} dS \phi \nabla\phi^* \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} dV \Delta\phi^* \phi = 0\tag{14}$$

ここで ϕ^* として

$$\phi(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} dV \Delta\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\phi(\mathbf{x}') \quad (15)$$

を満たす関数を選ぶことで Ω 内部の $\phi(\mathbf{x})$ を境界積分によって表すことができる. 式 (15) から

$$\Delta\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (16)$$

である. これは式 (9) と同じなので, ϕ^* として Green 関数を用いることができる. これを用いて

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} dS \phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\nabla\phi(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} - \int_{\Gamma} dS \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\nabla\phi^*(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} \quad (17)$$

領域内の解を境界積分によって表現できる.

5 具体的な計算

5.1 三次元の場合

式 (10) の両辺を三次元 Fourier 変換する.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[G_{lp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] &= g_{lp}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') \\ D_{ijlm}k_ik_mk_lg_{lp}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') &= \delta_{jp}\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (18)$$

D_{ijlm} は等方弾性体の場合に Lamé の定数 λ, μ を用いて

$$D_{ijlm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} + \mu(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) \quad (19)$$

と表せる.

左辺の $g_{lp}(\mathbf{k}, \mathbf{x}')$ に掛かる $D_{ijlm}k_ik_mk_l$ は

$$D_{ijlm}k_ik_mk_l = (\lambda + \mu)k_jk_l + \mu\delta_{jl}k_pk_p \quad (20)$$

と計算でき. 行列を用いて下のように表せる.

$$D_{ijlm}k_ik_mk_l = \left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda + \mu)k_1k_1 + \mu\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} & (\lambda + \mu)k_1k_2 & (\lambda + \mu)k_1k_3 \\ (\lambda + \mu)k_2k_1 & (\lambda + \mu)k_2k_2 + \mu\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} & (\lambda + \mu)k_2k_3 \\ (\lambda + \mu)k_3k_1 & (\lambda + \mu)k_3k_2 & (\lambda + \mu)k_3k_3 + \mu\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{array} \right\} \quad (21)$$

この逆行列を求める.

$$\begin{aligned}
& \{D_{ijkl}k_i k_m\}^{-1} \\
&= \frac{1}{\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_1 k_1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} & -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_1 k_2}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} & -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_1 k_3}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \\ -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_2 k_1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} & 1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_2 k_2}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} & -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_2 k_3}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \\ -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_3 k_1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} & -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_3 k_2}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} & 1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_3 k_3}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \left(\delta_{jl} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_j k_l}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

これを用いて式 (18) を変形すると

$$g_{jl}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \left(\delta_{jl} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_j k_l}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \right) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \tag{23}$$

となる.

ここで g_1, g_{2jl} を下のように置く.

$$g_1 = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \tag{24}$$

$$g_{2jl} = \frac{k_j k_l}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \tag{25}$$

これらの三次元 Fourier 逆変換を計算することで $G_{lp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ が求められる. まず g_1 は

$$\mathcal{F}^{-1}[g_1] = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \tag{26}$$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ と \mathbf{k} の成す角を θ として球座標変換して積分を計算する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[g_1] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k^2} \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta) \\
&\quad \cos \theta = X, \quad d\theta = -\frac{1}{\sin \theta} dX \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \theta & 0 \rightarrow \pi \\ \hline X & 1 \rightarrow -1 \\ \hline \end{array} \\
\mathcal{F}^{-1}[g_1] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \int_1^{-1} dX - \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|X) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \frac{1}{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) - \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
&= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
&= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|
\end{aligned} \tag{27}$$

次に g_{2jl} についての計算を行う.

$$\mathcal{F}^{-1}[g_{2jl}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{k_j k_l}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \quad (28)$$

Fourier 変換の一般的な関係から

$$\mathcal{F}^{-1}[g_{2jl}] = \frac{1}{(2\pi)^3 j^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \quad (29)$$

続いて, g_1 の場合と同じように, 球座標変換して計算を行う.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[g_{2jl}] &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k^4} \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{k^2} \theta \sin \theta \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \theta) \\ \cos \theta &= X, \quad d\theta = -\frac{1}{\sin \theta} dX \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \theta & 0 \rightarrow \pi \\ \hline X & 1 \rightarrow -1 \\ \hline \end{array} \\ \mathcal{F}^{-1}[g_{2jl}] &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \int_0^{\infty} dk \int_1^{-1} dX -\frac{1}{k^2} \exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|X) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \int_0^{\infty} dk \frac{1}{ik^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\exp(i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) - \exp(-i\mathbf{k}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\sin(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{k^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{8\pi} \end{aligned} \quad (30)$$

式 (27) と式 (30) から下のように基本解が求まる.

$$\begin{aligned} G_{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(\delta_{jl} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \right) |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= \frac{1}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu) \frac{\delta_{jl}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + (\lambda + \mu) \frac{(x_j - x'_j)(x_l - x'_l)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

6 二次元の場合

二次元の場合も途中までは三次元の場合と同じだが, Fourier 逆変換の計算が異なる. $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ を二次元 Fourier 変換した関数を $g_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}')$ とおくと三次元の場合と同様に下のように表せる. ここで三次元の場合と同様に Lamé の定数 λ, μ を用いているが, 二次元の場合は平面ひずみ問題と平面応力問題で Lamé の定数の値が異なることに注意されたい.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] &= g_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') \\ g_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{\mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \left(\delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{k_i k_j}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \right) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (32)$$

g_1 と g_{2ij} を下のようにおき, それぞれの二次元 Fourier 逆変換を計算すれば $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ が求まる.

$$g_1 = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \quad (33)$$

$$g_{2ij} = \frac{k_i k_j}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \quad (34)$$

まず g_1 についての計算を行う.

$$\mathcal{F}^{-1}[g_1] = G_1 \quad (35)$$

G_1 は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = -f(\mathbf{x}) \quad (36)$$

という方程式の Green 関数に等しい.

ここで $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, θ を $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ と x 軸の成す角とし, 円柱座標系を用いた表現に書き変える.
 $r > 0$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) G_1 = 0 \quad (37)$$

G_1 は r だけに依存するので

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) G_1 = 0 \quad (38)$$

式 (38) は下のように変形できる.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G_1}{\partial r} \right) = 0 \quad (39)$$

両辺に r を掛けて不定積分する.

$$r \frac{\partial G_1}{\partial r} + C_1 = 0 \quad (40)$$

両辺を r で割って不定積分する.

$$G_1 + C_1 \ln r + C_2 = 0 \quad (41)$$

C_1, C_2 を求める必要がある. 式 (35) を半径が ϵ の円 C_ϵ 内部で積分すると

$$\iint_{C_\epsilon} d\mathbf{x}' \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G_1 = - \iint_{C_\epsilon} d\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -1 \quad (42)$$

ガウスの発散定理から

$$\begin{aligned} \iint_{C_\epsilon} d\mathbf{x}' \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G_1 &= \int_0^{2\pi} d\phi \epsilon \left\{ \frac{\partial G_1}{\partial x} \Big|_{r=\epsilon} \quad \frac{\partial G_1}{\partial y} \Big|_{r=\epsilon} \right\} \left\{ \begin{array}{c} n_x \\ n_y \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \epsilon \left\{ \cos \phi \frac{\partial G_1}{\partial r} \Big|_{r=\epsilon} \quad \sin \phi \frac{\partial G_1}{\partial r} \Big|_{r=\epsilon} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \cos \phi \\ \sin \phi \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \epsilon \frac{\partial G_1}{\partial r} \Big|_{r=\epsilon} \\ &= -2\pi C_1 \end{aligned} \quad (43)$$

これより $C_1 = \frac{1}{2\pi}$, C_2 は任意の値をとることができる. $C_2 = 0$ とすると G_1 は

$$G_1 = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (44)$$

となる.

続いて g_{2ij} の二次元逆 Fourier 変換を計算する.

$$\mathcal{F}^{-1}[g_{2ij}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \quad (45)$$

Fourier 変換の一般的な関係から

$$\mathcal{F}^{-1}[g_{2ij}] = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \quad (46)$$

ここで左辺の

$$-\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \quad (47)$$

という部分は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = -f(\mathbf{x}) \quad (48)$$

という方程式の Green 関数に等しい. この Green 関数を G_2 とおく

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 G_2 = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (49)$$

$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, θ を $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ と x 軸の成す角とし, 円柱座標系を用いた表現に書き変える. $r > 0$ とすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 G_2 = 0 \quad (50)$$

これは下のように変形できる.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G_2}{\partial r} \right) \right) \right) = 0 \quad (51)$$

不定積分を繰り返すと

$$G_2 + C_3 r^2 \ln r + C_4 r^2 + C_5 \ln r + C_6 = 0 \quad (52)$$

となる.

C_3, C_4, C_5, C_6 を求める必要がある. 式 (49) を半径が ϵ の円 C_ϵ 内部で積分すると

$$\iint_{C_\epsilon} d\mathbf{x}' \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 G_2 = - \iint_{C_\epsilon} d\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -1 \quad (53)$$

ガウスの発散定理から

$$\begin{aligned} \iint_{C_\epsilon} d\mathbf{x}' \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 G_2 &= \int_0^{2\pi} d\phi \epsilon \left\{ \left. \frac{\partial \Delta G_2}{\partial x} \right|_{r=\epsilon} \quad \left. \frac{\partial \Delta G_2}{\partial y} \right|_{r=\epsilon} \right\} \left\{ \begin{array}{c} n_x \\ n_y \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \epsilon \left. \frac{\partial \Delta G_2}{\partial r} \right|_{r=\epsilon} \\ &= -8\pi C_1 \end{aligned} \quad (54)$$

これより $C_3 = \frac{1}{8\pi}$, C_4, C_5, C_6 は任意の値となる. $C_4 = -\frac{1}{16\pi}$, $C_5 = C_6 = 0$ とすると

$$G_2 = -\frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + \frac{1}{16\pi} r^2 \quad (55)$$

となる.

さらに $\mathcal{F}^{-1}[g_{2ij}]$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[g_{2ij}] &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\delta_{ij} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

式 (44) と式 (56) から基本解が求まる.

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu)\delta_{ij} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - (\lambda + \mu) \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right) \quad (57)$$

7 Appendix

7.1 留数定理を利用した実積分の計算

(1)

留数定理を利用して下の実積分を計算する.

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin(ax)}{x} \quad (58)$$

これを計算するために

$$\int_C dz \frac{e^{iaz}}{z} = 0 \quad (59)$$

を利用する. 積分区間 C は $\frac{e^{iaz}}{z}$ が正則となる閉区間で図 1 のようにとる. $\frac{e^{iaz}}{z}$ は $x = 0$ に特異点を持つため, この部分を避けるように原点を中心に半径 ϵ の半円を通るようにし, r を ∞ に近づけ, ϵ を 0 に近づける.

式 59 は下のよう分割できる.

$$\int_{-r}^{-\epsilon} dx \frac{e^{iax}}{x} + \int_{C_\epsilon} z \frac{e^{iaz}}{z} + \int_\epsilon^r dx \frac{e^{iax}}{x} + \int_{C_r} z \frac{e^{iaz}}{z} = 0 \quad (60)$$

ここで左辺第四項は Jordan の補助定理から 0 となる. 第一項と第三項は下のようまとめられる.

$$\int_{-r}^{-\epsilon} dx \frac{e^{iax}}{x} + \int_\epsilon^r dx \frac{e^{iax}}{x} = 2i \int_\epsilon^r dx \frac{\sin(ax)}{x} \quad (61)$$

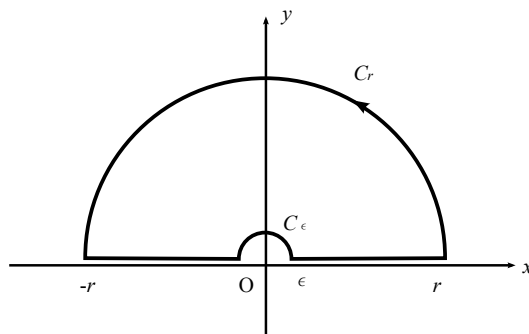


図1 積分区間

式 (60) の第二項は留数定理を利用して求められる.

$$\begin{aligned} \int_{C_\epsilon} dz \frac{e^{iaz}}{z} &= \left(-\frac{1}{2}\right) 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iaz}}{z}, 0 \right] \\ &= -\pi i \lim_{z \rightarrow 0} e^{iaz} \\ &= -\pi i \end{aligned} \quad (62)$$

式 (61) と式 (62) から

$$2i \int_0^\infty dx \frac{\sin(ax)}{x} - \pi i = 0 \quad (63)$$

以上から式 (58) の実積分が求まる.

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin(ax)}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (64)$$

(2)

次に

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin(ax)}{x^3} \quad (65)$$

という実積分を計算する. これは (1) の場合と同様な方法で解くことができる.

積分区間 C を (1) と同様に図 1 のようにとり, 下の複素積分を計算する.

$$\int_C z \frac{e^{iaz}}{z^3} = 0 \quad (66)$$

これを四つの部分の積分に分割する.

$$\int_{-r}^{-\epsilon} dx \frac{e^{iax}}{x^3} + \int_{C_\epsilon} z \frac{e^{iaz}}{z^3} + \int_\epsilon^r dx \frac{e^{iax}}{x^3} + \int_{C_r} z \frac{e^{iaz}}{z^3} = 0 \quad (67)$$

第一項と第三項をまとめる.

$$\int_{-r}^{-\epsilon} dx \frac{e^{iax}}{x^3} + \int_\epsilon^r dx \frac{e^{iax}}{x^3} = 2i \int_\epsilon^r dx \frac{\sin(ax)}{x^3} \quad (68)$$

留数定理を用いて第二項を計算する.

$$\begin{aligned} \int_{C_\epsilon} z \frac{e^{iaz}}{z^3} &= \left(-\frac{1}{2}\right) 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iaz}}{z^3}, 0 \right] \\ &= -\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} e^{iaz} \\ &= -\pi i (ia)^2 = \pi ia^2 \end{aligned} \tag{69}$$

式 (68) と式 (69) から

$$2i \int_0^\infty dx \frac{\sin(ax)}{x^3} + \pi ia^2 = 0 \tag{70}$$

以上から式 (65) の実積分が求まる.

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin(ax)}{x^3} = -\frac{\pi a^2}{2} \tag{71}$$

参考文献

- [1] 後藤憲一, 山本邦夫, 神吉健 (1979), 詳解応用物理数学演習, 共立出版株式会社.
- [2] グリーンベルグ, M. D. (1983), 応用グリーン関数 - 境界要素法の基礎, ブレイン図書株式会社.