遅い非圧縮粘性定常流の有限要素法定式化

1　定式化の流れ

流速が比較的遅く, レイノルズ数が小さい場合に Navier-Stokes 方程式の非線形な項を無視し, 線形な方程式として書くことができる. この方程式は Stokes 方程式と呼ばれる. ここでは非圧縮性で定常な場合の Stokes 方程式に有限要素法を適用する方法について述べる.

この問題では流速と圧力が未知の変数となるが, 流速と圧力とに同次な要素を用いた場合, 得られる連立一次方程式は解を持たないものになってしまう. これを避けるため様々な工夫がなされる. ここでは流速について圧力よりも一つ次数の高い補間関数を用いる方法をとる. この方法は混合補間法と呼ばれる.

2　基礎方程式

$$-\sigma_{ij,i} = \rho g_j \quad (\varOmega\text{内}) \tag{1}$$
$$v_i = \hat{v}_i \quad (\varGamma_1\text{上}) \tag{2}$$
$$T_i = \hat{T}_i \quad (\varGamma_2\text{上}) \tag{3}$$

式 (1) から式 (3) は基礎方程式である. これは弾性問題の方程式とよく似ている. 式 (1) は Cauchy の第一運動法則から導かれる. 式 (2), 式 (3) は境界条件である. 式 (2) は境界において流速が既知である第一種境界条件 (Dirichelet 条件), 式 (3) は境界において応力ベクトルが既知である第二種境界条件 (Neumann 条件) と呼ばれる.

Newton 流体とすると応力は以下の様に表される. ここで μ は粘性係数である.

$$\sigma_{ij} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})v_{k,l} \tag{4}$$

非圧縮性流体であるため連続の式が成り立つ. 連続の式は以下の様に表される.

$$v_{i,i} = 0 \tag{5}$$

3　弱形式

弱形式は以下の様になる. またここで $B_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$ とした.

$$\begin{aligned} &-\int_{\varGamma_2} v_j^* T_j \mathrm{d}\varGamma - \int_{\varOmega} v_{j,j}^* p \mathrm{d}\varOmega + 2\mu \int_{\varOmega} v_{j,m}^* B_{qrjm} v_{q,r} \mathrm{d}\varOmega = \\ &\rho \int_{\varOmega} v_j^* g_j \mathrm{d}\varOmega \end{aligned} \tag{6}$$

$$-\int_\Omega p^* v_{i,i}\ \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{7}$$

4　補間関数の導入

速度に関する補間関数として Φ^α, 圧力に関する補間関数として Ψ^λ を導入する．補間関数を用いて式 (6) と式 (7) を書き変えると以下の様になる．

$$\begin{aligned} &v_j^{*\beta}\left(-\int_{\Gamma_2}\Phi^\beta T_j \mathrm{d}\Gamma - p^\lambda\int_\Omega \Phi^\beta_{,j}\Psi^\lambda \mathrm{d}\Omega + 2\mu B_{qrjm}v_q^\alpha\int_\Omega \Phi^\beta_{,m}\Phi^\alpha_{,r}\mathrm{d}\Omega\right. \\ &\left. -\rho\int_\Omega \Phi^\beta g_j \mathrm{d}\Omega\right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$p^{*\lambda}\left(-\int_\Omega \Phi^\alpha_{,i}\Psi^\lambda \mathrm{d}\Omega\right) = 0 \tag{9}$$

行列を使って表すと以下の様になる．

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{cc} v_j^{*\beta} & p^{*\lambda}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cc} 2\mu B_{qrjm}\int_\Omega \Phi^\beta_{,m}\Phi^\alpha_{,r}\mathrm{d}\Omega & -\int_\Omega \Phi^\beta_{,j}\Psi^\lambda \mathrm{d}\Omega \\ -\int_\Omega \Phi^\alpha_{,q}\Psi^\lambda \mathrm{d}\Omega & 0 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} v_q^\alpha \\ p^\lambda \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{cc} v_j^{*\beta} & p^{*\lambda}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \int_{\Gamma_2}\Phi^\beta T_j \mathrm{d}\Gamma + \rho\int_\Omega \Phi^\beta g_j \mathrm{d}\Omega \\ 0 \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

重み関数は任意の関数なので

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{cc} 2\mu B_{qrjm}\int_\Omega \Phi^\beta_{,m}\Phi^\alpha_{,r}\mathrm{d}\Omega & -\int_\Omega \Phi^\beta_{,j}\Psi^\lambda \mathrm{d}\Omega \\ -\int_\Omega \Phi^\alpha_{,q}\Psi^\lambda \mathrm{d}\Omega & 0 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} v_q^\alpha \\ p^\lambda \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{c} \int_{\Gamma_2}\Phi^\beta T_j \mathrm{d}\Gamma + \rho\int_\Omega \Phi^\beta g_j \mathrm{d}\Omega \\ 0 \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

となる．