二次元三角形要素・三次元四面体要素

1　二次元三角形要素

ここでは有限要素法で用いられる二次元三角形要素について述べる．

1.1　面積座標

三角形内部の座標を表すために，面積座標を用いる．面積座標は三角形内部の点と三つの頂点を結んだ時にできる三つの三角形の面積比によって表される．ここでは図 1 のように反時計回りに三角形の頂点に番号を振ることにする．

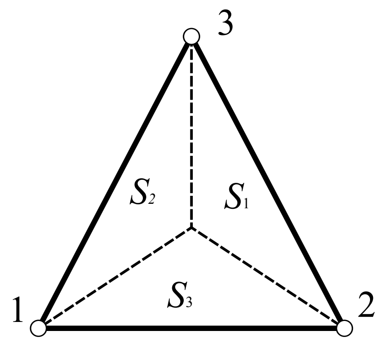

図 1　面積座標

面積座標を

$$\boldsymbol{\eta} = \left\{ \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} S_1/S \\ S_2/S \\ S_3/S \end{array} \right\} \tag{1}$$

と表す．面積座標は二次元直交座標 $\boldsymbol{x} = \{x, y\}$ の関数として $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$ と表せる．また各頂点における二次元直交座標を $\boldsymbol{x}^\beta$ とすると面積座標の性質から

$$\eta_\gamma(\boldsymbol{x}^\beta) = \delta_{\beta\gamma} \tag{2}$$

行列を用いて書くと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^1) &= \{1, 0, 0\} \\ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^2) &= \{0, 1, 0\} \\ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^3) &= \{0, 0, 1\} \end{aligned} \tag{3}$$

次に三角形内部の任意の二次元直交座標から面積座標を得ることを考える．面積座標は二次元直交座標の一次関数として表せるので，この係数を求めることで二次元直交座標から面積座標を求められる．

$$\begin{aligned}\eta_1(\boldsymbol{x}) &= a_{11} + a_{12}x + a_{13}y \\ \eta_2(\boldsymbol{x}) &= a_{21} + a_{22}x + a_{23}y \\ \eta_3(\boldsymbol{x}) &= a_{31} + a_{32}x + a_{33}y\end{aligned} \tag{4}$$

行列を用いて書くと

$$\left\{\begin{array}{c}\eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}1 \\ x \\ y\end{array}\right\} \tag{5}$$

この係数 a_{ij} は三角形頂点の二次元直交座標から求められる．先に示したように頂点における面積座標は既知であるので以下のように表せる．

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^1) \\ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^2) \\ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^3)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc}1 & 1 & 1 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3\end{array}\right\} \tag{6}$$

これから係数 a_{ij} が以下のように求まる．ここで行列の右上の -1 は逆行列を意味する．

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{ccc}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{array}\right\} &= \left\{\begin{array}{ccc}1 & 1 & 1 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3\end{array}\right\}^{-1} \\ &= \frac{1}{\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 1 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3\end{array}\right|}\left\{\begin{array}{ccc}x^2y^3 - y^2x^3 & x^3y^1 - y^3x^1 & x^1y^2 - y^1x^2 \\ y^2 - y^3 & y^3 - y^1 & y^1 - y^2 \\ x^3 - x^2 & x^1 - x^3 & x^2 - x^1\end{array}\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

よって三角形内部の点 $\boldsymbol{x}$ の面積座標は

$$\left\{\begin{array}{c}\eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3\end{array}\right\} = \frac{1}{2S}\left\{\begin{array}{ccc}x^2y^3 - y^2x^3 & x^3y^1 - y^3x^1 & x^1y^2 - y^1x^2 \\ y^2 - y^3 & y^3 - y^1 & y^1 - y^2 \\ x^3 - x^2 & x^1 - x^3 & x^2 - x^1\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}1 \\ x \\ y\end{array}\right\} \tag{8}$$

となる．ここで S は三角形の面積を表す．面積座標を用いた関数の積分は下の公式を用いて求められる．

$$\int\int \eta_1^i \eta_2^j \eta_3^k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2S\frac{i!j!k!}{(2+i+j+k)!} \tag{9}$$

ここで i, j, k は正の整数である．

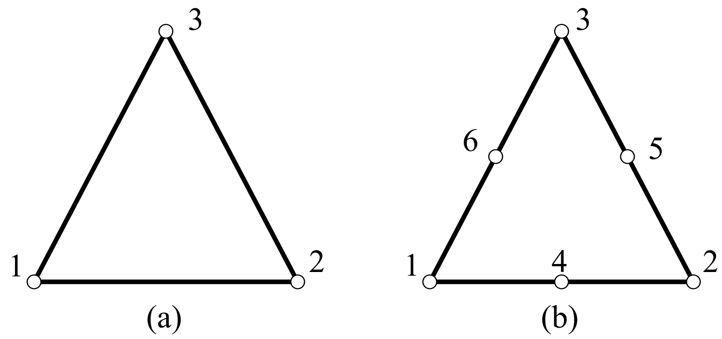

図 2　三角形要素の例. (a) 一次要素. (b) 二次要素.

1.2　二次元三角形一次要素

図 2 に三角形一次要素と, 三角形二次要素の一例を示す.

三角形一次要素では補間関数として一次関数が用いられる. ここで問題としている関数を $u(x,y)$ とすると, これは補間関数 $\varPhi^{\alpha}(x,y)$ と要素節点における $u(x,y)$ の値 u^{α} を用いて以下のように近似される.

$$u(x,y) = \sum_{\alpha=1}^{3} \varPhi^{\alpha} u^{\alpha} \tag{10}$$

三角形一次要素では普通, 節点として三つの頂点が選ばれる. 節点 β において $u(x,y)$ が u^{β} になることから

$$u(\boldsymbol{x}^{\beta}) = \sum_{\alpha=1}^{3} \varPhi^{\alpha}(\boldsymbol{x}^{\beta}) u^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{\alpha\beta} u^{\alpha} \tag{11}$$

である. よって

$$\varPhi^{\alpha}(\boldsymbol{x}^{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \tag{12}$$

式 (2) から $\varPhi^{\alpha}(\boldsymbol{x})$ は面積座標 $\eta_{\alpha}(\boldsymbol{x})$ と同じであることがわかる.

1.3　二次元三角形高次要素

三角形高次要素の補間関数は面積座標の関数として表すことができる. n 次要素の補間関数を $\varPhi^{(n)\alpha}$ として以下の様に表す.

$$\varPhi^{(n)\alpha} = \sum_{\boldsymbol{j}} A^{\alpha}_{\boldsymbol{j}} \prod_{k=1}^{3} \eta_k^{j_k} \tag{13}$$

ここで $\boldsymbol{j}$ は j_1, j_2, j_3 からなり, $j_1 + j_2 + j_3 = n$ となる正の整数ベクトルとする. $\sum$ は総和記号で, ここでは全てのとり得る $\boldsymbol{j}$ について和をとることとする. また $\prod$ は総積記号である. 三角形 n 次要素の節点数は $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ となり, 補間関数も同じ数だけある.

$A^{\alpha}_{\boldsymbol{j}}$ は

$$\Phi^{(n)\alpha}(\boldsymbol{\eta}^{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \tag{14}$$

という関係から求められる. 式 (13) から

$$\sum_{\boldsymbol{j}} A^{\alpha}_{\boldsymbol{j}} \prod_{k=1}^{3} (\eta^{\beta}_{k})^{j_k} = \delta_{\alpha\beta} \tag{15}$$

となる. $\boldsymbol{j}$ のとり得る組み合わせの数は節点数と等しく, この式の右辺は単位行列, 左辺は行列と行列の積と見なすことができる. よって式 (6) の場合と同様に逆行列を使って $A^{\alpha}_{\boldsymbol{j}}$ が求められる.

1.4　いくつかの関数の計算

有限要素法の定式化においてあらわれるいくつかの関数の計算方法を示しておく. まず

$$\int \Phi^{\alpha} \mathrm{d}\Omega \tag{16}$$

という式を計算する. 式 (14) から

$$\Phi^{\alpha} = \sum_{\boldsymbol{j}} A^{\alpha}_{\boldsymbol{j}} \prod_{k=1}^{3} \eta_k^{j_k} \tag{17}$$

面積座標の積分の公式 (式 (9)) から

$$\int \Phi^{\alpha} \mathrm{d}\Omega = 2S \sum_{\boldsymbol{j}} A^{\alpha}_{\boldsymbol{j}} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{3} (j_k)!}{\left(2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} j_k\right)!} \tag{18}$$

となる.

次に

$$\int \frac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial x_a} \frac{\partial \Phi^{\beta}}{\partial x_b} \mathrm{d}\Omega \tag{19}$$

という式を計算する. 式 (14) から

$$\frac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial x_a} = \sum_{\boldsymbol{j}} A^{\alpha}_{\boldsymbol{j}} \sum_{p=1}^{3} j_p \frac{\partial \eta_p}{\partial x_a} \prod_{k=1}^{3} \eta_k^{j_k - \delta_{kp}} \tag{20}$$

$$\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x_b} = \sum_{\boldsymbol{j}}\sum_{\boldsymbol{l}} A^\alpha_{\boldsymbol{j}} A^\beta_{\boldsymbol{l}} \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} j_p l_q \frac{\partial \eta_p}{\partial x_a}\frac{\partial \eta_q}{\partial x_b} \prod_{k=1}^{3} \eta_k^{j_k+l_k-\delta_{kp}-\delta_{kq}} \tag{21}$$

面積座標の積分の公式 (式 (9)) から

$$\int \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x_b} \mathrm{d}\Omega = 2S \sum_{\boldsymbol{j}}\sum_{\boldsymbol{l}} A^\alpha_{\boldsymbol{j}} A^\beta_{\boldsymbol{l}} \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} j_p l_q \frac{\partial \eta_p}{\partial x_a}\frac{\partial \eta_q}{\partial x_b} \frac{\prod_{k=1}^{3}(j_k+l_k-\delta_{kp}-\delta_{kq})!}{\left(2+\sum_{k=1}^{3}(j_k+l_k-\delta_{kp}-\delta_{kq})\right)!} \tag{22}$$

となる．ここで $\frac{\partial \eta_p}{\partial x_a}$ は面積座標を二次元直交座標で表した式 (式 (8)) から求まる．またこの式をそのまま用いてもよいが, 節点の位置を同様にとれば $\frac{\partial \eta_p}{\partial x_a}$ 以外の部分は既知となるため効率化できる．つまり

$$\int \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial x_b} \mathrm{d}\Omega = 2S \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} M^{\alpha\beta}_{pq} \frac{\partial \eta_p}{\partial x_a}\frac{\partial \eta_q}{\partial x_b} \tag{23}$$

とし, $M^{\alpha\beta}_{pq}$ は定数として計算しておけばよい．また

$$\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \eta_p}{\partial x_a} = 0 \tag{24}$$

という関係から $M^{\alpha\beta}_{pq}$ の 0 成分を増やし, 計算を効率化できる．

2　三次元四面体要素

三次元四面体要素について述べる．

2.1　体積座標

四面体内部の座標を表すために体積座標を用いる．体積座標は四面体内部の点と四つの頂点を結んだときにできる四つの四面体の体積比によって表される．ここでは図 3 のように四面体の頂点に番号を振ることにする．

座標を

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1/V \\ V_2/V \\ V_3/V \\ V_4/V \end{Bmatrix} \tag{25}$$

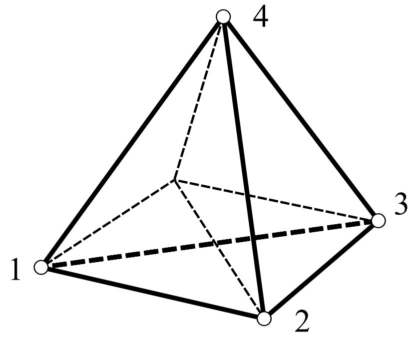

図 3　体積座標

と表す．体積座標は三次元直交座標 $\boldsymbol{x} = \{x, y, z\}$ の関数として $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})$ と表すことができ, 面積座標のとき (1.1) と同様の方法によって三次元直交座標と体積座標の関係式が得られる．

$$\begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \\ z^1 & z^2 & z^3 & z^4 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{26}$$

体積座標を使った関数の積分公式は下のようになる．

$$\int \chi_1^i \chi_2^j \chi_3^k \chi_4^l \mathrm{d}V = 6V \frac{i!j!k!l!}{(3+i+j+k+l)!} \tag{27}$$

ここで i, j, k, l は正の整数である．四面体一次要素の補間関数は体積座標と等しくなる．また四面体高次要素の補間関数は体積座標の関数として表現することができる．これらは変数の数が一つ増えただけで, 基本的に求め方は三角形要素の場合と同じであるので省略する．1.4 で示したような関数についても, 同様にして求められる．