静弾性問題の有限要素法定式化

1 定式化の流れ

静弾性問題の有限要素法定式化を行う．なおここでは線形弾性体の微小変形・微小ひずみ問題のみを扱う．静弾性問題の基礎方程式は偏微分方程式の形で書かれる．この偏微分方程式はそのまま解くことが難しく, 極限られた条件でしか厳密解は得られない．有限要素法はこうした問題の近似解を求めるための方法である．

有限要素法による定式化は以下のような流れで行われる．

1. 偏微分方程式の弱形式化
2. 解析領域の有限要素分割と要素の補間関数の導入

有限要素法では偏微分方程式をより解きやすくするために, 弱形式と呼ばれる形式へと書き換える．弱式化の段階で重み関数と呼ばれる関数が導入される．

続いて解析領域を有限の要素に分割する．解析領域はこれによって連続して隣り合う小さなメッシュに分割される．要素内の近似解は要素節点での値と補間関数によって表される．また重み関数として近似解と同形の関数が用いられる．このような重み関数の選び方は Ritz-Galerkin 法と呼ばれる．

これらの操作によってそれぞれの要素において成り立つ方程式と領域全体で成り立つ方程式が得られ, 問題は偏微分方程式から節点変位または節点力を未知数とする連立一次方程式へと書き換えられる．

2 指標表示

指標表示と総和規約を多く用いるのでこれについて説明する．

指標表示によってベクトル $\boldsymbol{a}$ は下のように表される．

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{e}_i$ は座標軸の各軸方向単位ベクトルで, 基底ベクトルと呼ばれる．またこの式は総和規約を適用するため i について総和をとる必要がある．$i = \{1, 2, 3\}$ として書き出すと下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a_i \boldsymbol{e}_i \\
&= a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3 \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{2}
$$

なおここでは一つの座標系しか用いないので基底ベクトルを省略して表記する.

指標表示の一例として下のような式が考えられる.

$$
X_i = Y_{ij} Z_j \tag{3}
$$

これは総和規約に基づくため j について総和をとる必要がある.

$i = \{0, 1, 2\}$, $j = \{0, 1, 2\}$ として式 (3) を行列を用いて表すと以下のようになる.

$$
\left\{ \begin{array}{c} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{array} \right\} \tag{4}
$$

行列を用いた表記はこのようにわかりやすいが、三階以上のテンソルでは表記が難しくなる. また実際に手で書く場合に非常に時間がかかり、実用的でない. 一方, 指標表示は総和規約に従うこと以外は, 添字付きの変数も他の変数と同様に扱うことができ, 交換法則や結合法則が自由に使えるという利点がある. 弾性論の数式には三階以上のテンソルも数多く使われるため, 指標表示を用いると便利である.

ここで扱う指標表示と総和規約には以下のルールを用いる.

1. 同じ項に同一の指標が現れる回数は, 一回または二回である. 三回以上は誤り.
2. 同一項の中で一回現れる添字は自由標 (free index) と呼ぶ. 自由標がある場合は式中の全ての項に同じ自由標が含まれていなければならない. 他の項で二回現れる場合も自由標として扱う.
3. 同一項の中で二回現れる添字は擬標 (dummy index) と呼ぶ. 擬標の現れる項は総和規約に従い, 総和をとる.

指標表示を使う上で注意が必要な点を挙げておく. 式 (3) の両辺を X_i で割るという式変形を考える. 以下の式は間違いである.

$$
1 = \frac{Y_{ij} Z_j}{X_i} \tag{5}
$$

これは i が元の式 (3) では自由標であったのに, 式変形によって同じ項での出現回数が二回になり擬標となってしまったためである. 指標表示を持つ変数も他の変数と同じように交換法則や結合法則を用いて式変形できるが, 既存の自由標, 擬標の関係が崩れるような変形はできない.

総和規約を適用しない添字にはアンダーラインをつけることにする．これによって式 (5) を正しい式に直すと下のようになる．

$$1 = \frac{Y_{\underline{i}j} Z_j}{X_{\underline{i}}} \tag{6}$$

指標表示ではよく用いられる Kronecker delta について説明しておく．Kronecker delta を δ_{ij} と表す．これは

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad (i = j) \\ \delta_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \tag{7}$$

という関係を持つ．

3 応力とひずみ

弾性問題においては物質の状態は応力, ひずみ等の物理量によって記述される．これについて簡単に説明する．微小ひずみは以下のように表される．

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{8}$$

ここで u_i は変位である．また $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ とする．なおこれ以降, ただひずみと言った場合は微小ひずみを意味することとする．

次に応力ベクトルについて説明する．応力ベクトルは連続体中のある点において仮想な面を考えたときに, これに作用する単位面積あたりの力である．応力ベクトルを $\boldsymbol{T}$ とする．式で表すと下のようになる．

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}s} \tag{9}$$

応力ベクトルは面の方向に依存して変わる量となっており, これだけでは物体の内部に作用する力を表すことは難しい．そこで面の向きに依存しない量として応力テンソルを導入する．応力テンソルを $\boldsymbol{\sigma}$ と表す．図 1 に応力の各成分を示す．応力の成分の一つ目の添字はそれが作用する面の法線方向, 二つ目の添字は力が向く方向を表す．

応力テンソルを用いて任意の方向の面の応力ベクトルを表すことができる．

$$T_j = \sigma_{ij} n_i \tag{10}$$

ここで $\boldsymbol{n}$ を任意の方向の面の法線ベクトルとする．

続いて応力とひずみとを関係付ける弾性係数テンソルについて説明する．線形弾性体では応力やひずみによらず弾性係数テンソルは一定であり

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{11}$$

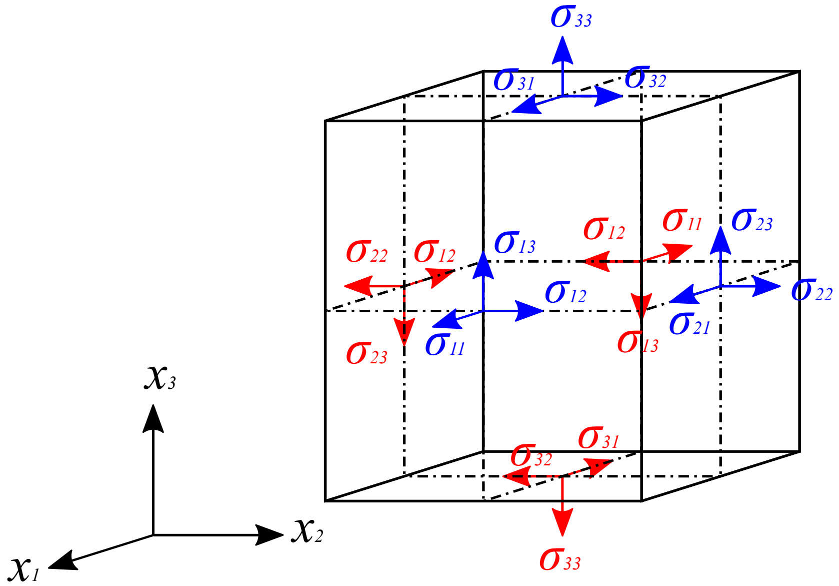

図 1　応力の成分

の関係がある．

また等方性の材料では下のように表すことができる．

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \tag{12}$$

ここで λ, μ は Lame の定数と呼ばれるパラメーターである．

4　弾性問題の基礎方程式

$$-\sigma_{ij,i} = \rho g_j \quad (\Omega\text{内}) \tag{13}$$
$$u_i = \hat{u}_i \quad (\Gamma_1\text{上}) \tag{14}$$
$$T_i = \hat{T}_i \quad (\Gamma_2\text{上}) \tag{15}$$

式 (13) から式 (15) は静弾性問題の基礎方程式である．式 (13) は Cauchy の第一運動法則から導かれる．式 (14), 式 (15) は境界条件である．式 (14) は境界において変位が既知である第一種境界条件 (Dirichelet 条件), 式 (15) は境界において応力ベクトルが既知である第二種境界条件 (Neumann 条件) と呼ばれる．静弾性問題を解くためには全ての境界において変位または応力ベクトルが既知であることが必要である．

5　弱形式

4. で示した基礎方程式を弱形式へと変形する．両辺に重み関数 u_j^* をかける．重み関数は Γ_1 上で 0 となる任意の関数である．

$$-u_j^*\sigma_{ij,i} = \rho u_j^* g_j \tag{16}$$

両辺を $\varOmega$ 内で領域積分する．

$$-\int_{\varOmega} u_j^*\sigma_{ij,i}\mathrm{d}\varOmega = \rho\int_{\varOmega} u_j^* g_j\mathrm{d}\varOmega \tag{17}$$

左辺をガウスの発散定理を用いて部分積分する．

$$-\int_{\varGamma} u_j^*\sigma_{ij}n_i\mathrm{d}\varGamma + \int_{\varOmega} u_{j,i}^*\sigma_{ij}\mathrm{d}\varOmega = \rho\int_{\varOmega} u_j^* g_j\mathrm{d}\varOmega \tag{18}$$

左辺第一項の $\sigma_{ij}n_i$ は応力ベクトル T_j である．また式 (15) と重み関数が $\varGamma_1$ 上で 0 となることから

$$-\int_{\varGamma_2} u_j^* T_j\mathrm{d}\varGamma + \int_{\varOmega} u_{j,i}^*\sigma_{ij}\mathrm{d}\varOmega = \rho\int_{\varOmega} u_j^* g_j\mathrm{d}\varOmega \tag{19}$$

これが弱形式で表された静弾性問題の方程式である．

次に, 応力-ひずみ関係とひずみ-変位関係を用いて変位を使った表現に変形する．

$$-\int_{\varGamma_2} u_j^* T_j\mathrm{d}\varGamma + \int_{\varOmega} u_{j,i}^* D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\varOmega = \rho\int_{\varOmega} u_j^* g_j\mathrm{d}\varOmega \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&-\int_{\varGamma_2} u_j^* T_j\mathrm{d}\varGamma + \frac{1}{2}\int_{\varOmega} u_{j,i}^* D_{ijkl}(\delta_{km}\delta_{ln}+\delta_{lm}\delta_{kn})u_{m,n}\mathrm{d}\varOmega = \\ &\rho\int_{\varOmega} u_j^* g_j\mathrm{d}\varOmega\end{aligned} \tag{21}$$

ここで弾性定数テンソルの対称性 $D_{ijkl} = D_{ijlk}$ から

$$\begin{aligned}&-\int_{\varGamma_2} u_j^* T_j\mathrm{d}\varGamma + \int_{\varOmega} u_{j,i}^* D_{ijkl}u_{k,l}\mathrm{d}\varOmega = \\ &\rho\int_{\varOmega} u_j^* g_j\mathrm{d}\varOmega\end{aligned} \tag{22}$$

6 要素分割と補間関数の導入

要素内の近似関数を $\varPhi^\alpha$ を用いて次式のように表す．$\varPhi^\alpha$ を補間関数と呼ぶ．ここで添字 α は要素の節点を意味する．なおこれに関しても総和規約が適用されるためこの式では節点全てについて和をとる必要がある．

$$u_i = \varPhi^\alpha u_i^\alpha \tag{23}$$

ここで u_i^α は節点 α における変位である．続いて重み関数は補間関数を用いて以下のように表される．

$$u_i^* = \Phi^\alpha u_i^{*\alpha} \tag{24}$$

これらを座標で偏微分すると以下のようになる．

$$u_{i,j} = \Phi^\alpha_{,j} u_i^\alpha \tag{25}$$

$$u^*_{i,j} = \Phi^\alpha_{,j} u_i^{*\alpha} \tag{26}$$

これらを式 (22) に代入する．

$$\begin{aligned} &-\int_{\Gamma_2} \Phi^\beta u_j^{*\beta} T_{\underline{j}} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \Phi^\beta_{,i} u_j^{*\beta} D_{ijkl} \Phi^\alpha_{,l} u_k^\alpha \mathrm{d}\Omega = \\ &\rho \int_\Omega \Phi^\beta u_j^{*\beta} g_j \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{27}$$

積分に関係ない変数を積分の外に出す．

$$\begin{aligned} &-u_j^{*\beta} \int_{\Gamma_2} \Phi^\beta T_j \mathrm{d}\Gamma + u_j^{*\beta} D_{ijkl} u_k^\alpha \int_\Omega \Phi^\beta_{,i} \Phi^\alpha_{,l} \mathrm{d}\Omega = \\ &\rho u_j^{*\beta} \int_\Omega \Phi^\beta g_j \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{28}$$

全ての項を左辺に移項して, $u_j^{*\beta}$ でくくる．

$$u_j^{*\beta} \left(-\int_{\Gamma_2} \Phi^\beta T_j \mathrm{d}\Gamma + D_{ijkl} u_k^\alpha \int_\Omega \Phi^\beta_{,i} \Phi^\alpha_{,l} \mathrm{d}\Omega - \rho \int_\Omega \Phi^\beta g_j \mathrm{d}\Omega \right) = 0 \tag{29}$$

これが成り立つには左辺の括弧内が 0 となる必要がある．よって

$$\begin{aligned} &-\int_{\Gamma_2} \Phi^\beta T_j \mathrm{d}\Gamma + D_{ijkl} u_k^\alpha \int_\Omega \Phi^\beta_{,i} \Phi^\alpha_{,l} \mathrm{d}\Omega = \\ &\rho \int_\Omega \Phi^\beta g_j \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{30}$$

となる．

補間関数 Φ^α を決定すると上の式から, 要素剛性行列が求められる．またこれは個々の要素及び, 領域全体で成り立つ．全ての要素について要素剛性行列を計算し, これらを足し合わせて全体剛性行列を作ると, 節点変位または節点力を未知数とする連立一次方程式が得られる．これを解けば静弾性問題の近似解が得られる．